MATHEMATIQUES 2

Durée : 4 heures

Spéc PHP-CHP-CHP'

On se propose dans ce problème de calculer la valeur des deux intégrales :

$$\gamma = \int_0^{+\infty} \cos(x^2)dx \qquad \text{et} \qquad \sigma = \int_0^{+\infty} \sin(x^2)dx$$

Dans la première partie on introduit la notion de valeur moyenne d'une fonction. Dans la deuxième partie on s'intéresse aux solutions d'une équation différentielle, qui interviennent dans le calcul de γ et σ. La convergence de γ et σ ainsi que le signe de σ sont étudiés dans la troisième partie. Dans la quatrième partie on détermine γ et σ en utilisant des intégrales multiples.

PREMIÈRE PARTIE
Sur la valeur moyenne

Dans cette partie, on désigne par g une fonction continue sur $[0,+\infty[$ à valeurs réelles. On associe à g la fonction g_1 définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$g_1(T) = \frac{1}{T}\int_0^T g(t)dt.$$

Si $g_1(T)$ admet une limite lorsque T tend vers $+\infty$, on note $V_m(g)$ cette limite.

1.1/ Etude de deux exemples :

1.1.1/ Expliciter $g_1(T)$ pour g définie par $g(t) = \text{tht}$ (où th désigne la fonction tangente hyperbolique). Etudier l'existence de $V_m(g)$ et préciser sa valeur éventuelle.

1.1.2/ On suppose dans cette question que la fonction g est définie par $g(t) = \text{Arccos}(\cos t)$.

1.1.2.1/ Calculer $g_1(2n\pi)$ pour n appartenant à $\mathbb{N}^*$.

1.1.2.2/ Etudier l'existence de $V_m(g)$ et préciser sa valeur éventuelle.

1.2/ On désigne de nouveau par g une fonction continue quelconque sur $[0,+\infty[$. Etudier l'existence de $V_m(g)$ et déterminer sa valeur éventuelle dans les cas suivants :

1.2.1/ l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(t)dt$ est convergente ;

1.2.2/ g(t) tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$;

1.2.3/ g(t) admet une limite ℓ lorsque t tend vers $+\infty$;

1.2.4/ la fonction g est périodique de période τ strictement positive (c'est-à-dire $g(t+\tau) = g(t)$ pour tout $t \geq 0$).

DEUXIÈME PARTIE

Sur les solutions d'une équation différentielle.

On considère l'équation différentielle (E) $\quad x\,y'' - y' + 4x^3 y = 0$

dont on se propose de déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$.

On recherche d'abord les solutions développables en série entière.

On note $x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une telle solution lorsqu'elle existe et on désigne par R son rayon de convergence.

2.1/ Montrer qu'il existe une relation que l'on explicitera entre a_{n+4} et a_n.

2.2/ Pour $p \in \mathbb{N}$ déterminer a_{4p+1} et a_{4p+3}.

2.3/ Pour $p \in \mathbb{N}$ exprimer a_{4p} en fonction de a_0 et de p (resp. a_{4p+2} en fonction de a_2 et de p).

2.4/ Quel est le rayon de convergence R de la série entière obtenue ?

2.5/ Soit $\mathcal{S}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont solutions de (E) sur $\mathbb{R}$. Préciser une base de $\mathcal{S}$.

TROISIEME PARTIE

Sur la convergence de certaines intégrales généralisées.

Dans cette partie on désigne par α un nombre réel strictement positif et on considère les intégrales généralisées :

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{t^\alpha} dt \qquad J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$$

$$\gamma = \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx \qquad \sigma = \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx.$$

3.1/ On suppose dans cette question que α appartient à l'intervalle $]0,1[$.

3.1.1/ Etudier la convergence des intégrales $I(\alpha)$ et $J(\alpha)$.

3.1.2/ En déduire la convergence des intégrales γ et σ.

3.1.3/ La fonction $x \longmapsto \cos(x^2)$ (resp. $x \longmapsto \sin(x^2)$) admet-elle une limite lorsque x tend vers $+\infty$? (on justifiera la réponse).

3.1.4/ On considère la suite : $u_n(\alpha) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$, $n \in \mathbb{N}$

3.1.4.1/ Etablir la convergence de la série $\sum u_n(\alpha)$ et préciser le signe de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(\alpha)$.

3.1.4.2/ En déduire le signe de $J(\alpha)$ et celui de σ.

3.2/ On suppose dans cette question : $\alpha \geq 1$.
Quelle est la nature de l'intégrale $I(\alpha)$ (resp. $J(\alpha)$) ?

QUATRIÈME PARTIE

Détermination de γ et σ à l'aide d'intégrales multiples.

Dans cette partie le plan euclidien est rapporté à un repère orthonormé ; on désigne par t un nombre réel positif ou nul, par $\mathscr{D}(t)$ l'ensemble des couples (x,y) de $\mathbb{R}^2$ tels que $0 \leq x \leq t$ et $0 \leq y \leq t$.

On considère les fonctions C et S définies sur $[0,+\infty[$ par :

$$C(t) = \int_0^t \cos(x^2)dx \qquad S(t) = \int_0^t \sin(x^2)dx$$

et les fonctions K et L définies sur $[0,+\infty[$ par :

$$K(t) = \iint_{\mathscr{D}(t)} \cos(x^2+y^2)dxdy \qquad L(t) = \iint_{\mathscr{D}(t)} \sin(x^2+y^2)dxdy .$$

4.1/ Exprimer K(t) et L(t) en fonction de C(t) et S(t).

4.2/ Déduire de 4.1/ et de 3.1.2/ que K(t) (resp. L(t)) admet une limite lorsque t tend vers $+\infty$, limite que l'on précisera en fonction de γ et σ.

4.3/ Etudier la continuité des fonctions K et L sur $[0,+\infty[$.

4.4/ Etablir l'existence et exprimer en fonction de γ et σ la valeur de $V_m(K)$ (resp. de $V_m(L)$) (la notation V_m a été précisée dans la première partie).

4.5/ On considère la fonction f définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$f(\theta) = \frac{1}{\cos\theta} \text{ si } \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \quad \text{et} \quad f(\theta) = \frac{1}{\sin\theta} \text{ si } \theta \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right].$$

4.5.1/ Vérifier que les fonctions f et $\frac{1}{f}$ sont continues sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

4.5.2/ On désigne par Γ (resp. par Γ_t) l'arc de courbe défini en coordonnées polaires par $\rho = f(\theta)$ (resp. par $\rho = t\, f(\theta)$) où θ appartient à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
Représenter Γ et Γ_t ainsi que l'ensemble $\mathscr{D}(t)$ dans le plan euclidien.

4.5.3/ Exprimer K(t) à l'aide de l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t\, f(\theta))^2 d\theta$

4.6/ On considère les fonctions K_1, L_1 et φ définies sur $]0,+\infty[$ par :

$$K_1(T) = \frac{1}{T}\int_0^T K(t)dt \qquad L_1(T) = \frac{1}{T}\int_0^T L(t)dt \qquad \varphi(T) = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{f(\theta)}\left[\int_0^{Tf(\theta)} \sin(u^2)du\right]d\theta.$$

On rappelle que si h : $(u,v) \longmapsto h(u,v)$ est une fonction continue sur l'ensemble $u_1 \le u \le u_2$, $v_1 \le v \le v_2$, alors les intégrales :

$$\int_{u_1}^{u_2}\left[\int_{v_1}^{v_2} h(u,v)dv\right]du \qquad \int_{v_1}^{v_2}\left[\int_{u_1}^{u_2} h(u,v)du\right]dv$$

sont égales.

4.6.1/ Exprimer $K_1(T)$ en fonction de $\varphi(T)$.

4.6.2/ Montrer que la fonction S est bornée sur $[0,+\infty[$.

4.6.3/ Quelle est la limite de $\varphi(T)$ lorsque T tend vers $+\infty$?
En déduire $V_m(K)$.

4.6.4/ Déduire de 4.4/ et de 4.6.3/ une relation entre γ et σ.

4.6.5/ Calculer $V_m(L)$ (On utilisera la même méthode que celle utilisée pour calculer $V_m(K)$).

4.6.6/ En déduire une nouvelle relation entre γ et σ.

4.6.7/ Déduire de ce qui précède les valeurs respectives de γ et σ.

4.7/ Indiquer l'allure du graphe de la fonction S sur l'intervalle $[0,+\infty[$.